

## ДЕТЕРМИНАНТЕ

### Подсетник за студенте уз слајдове за уводно предавање

Подсетник садржи дефиниције и основне чињенице у вези са графовским приступом теорији детерминаната. Подсетник би требало користити уз предавање наставника и уз уџбеник.

*Диграф* се састоји од *чворова* и (*оријентисаних*) *грана*. Свака грана *излази* из једног чвора и *улази* у један чвор. Грана која улази у исти чвор из кога је изашла назива се *петља*.

Матрици  $A = [a_{ij}]$  придружује се *Коутсов* (*Coates*) *диграф*  $G_A$ . Елемент  $a_{ij}$  се придружује грани која води од чвора  $j$  до чвора  $i$  и назива се *пренос* те гране. Елемент  $a_{ii}$  се придружује петљи код чвора  $i$ . *Фактор* диграфа  $G_A$  је његов делимични граф код кога у сваки од чворова диграфа  $G_A$  улази тачно једна грана и из сваког чвора излази такође тачно једна. Фактор се састоји од (*оријентисаних*) *контура* укључујући ту и петље. *Пренос*  $C(F)$  фактора  $F$  је производ преноса грана од којих се састоји фактор  $F$ . Број контура садржаних у фактору  $F$  обележава се са  $p(F)$ . *Детерминанта*  $\det A$  матрице  $A = [a_{ij}]$  реда  $n$  се дефинише помоћу

$$\det A = (-1)^n \sum_F (-1)^{p(F)} C(F),$$

где се сумирање врши преко свих фактора  $F$  диграфа  $G_A$ .

**Теорема.**  $\det A^T = \det A$ , *тј. детерминанта транспоноване матрице једнака је детерминанти полазне матрице.*

**Доказ.** Транспоновање матрице изазива промену оријентације свих грана у придруженом диграфу. При томе сваки фактор диграфа прелази у фактор новог диграфа са истим преносом и бројем контура. Дакле, сви сабирци у дефиниционом изразу за детерминанту остају непромењени па је детерминанта транспоноване матрице једнака детерминанти полазне матрице.

У диграфу придруженом матрици дозвољено је изостављање грана преноса 0 јер после уклањања таквих грана нестају сви они фактори који садрже бар једну такву грану а такви фактори су непотребни јер је њихов пренос 0 и не доприносе вредности детерминанте. На тај начин цртеж диграфа постаје једноставнији.

**Теорема.** *Ако у матрици две врсте замене места, детерминанта матрице мења знак.*

**Доказ.** Ако  $i$ -та и  $j$ -та врста промене места, диграф се мења тако што све гране које су пре трансформације улазиле у чвор  $i$  улазе сада у чвор  $j$  и, обрнуто, оне које су улазиле у  $j$  улазе сада у  $i$ . За факторе диграфа разматрају се два случаја: а) чворови  $i$  и  $j$  се налазе у истој контури фактора, б) чворови  $i$  и  $j$  се налазе у различитим контурама фактора. У резултујућем фактору у оба случаја долази до промене парности броја контура, при чему пренос фактора остаје очуван. Дакле, у дефиниционом изразу за детерминанту сваки сабирак мења знак па одатле следује тврђење теореме.